高校生に対する幾何学についての出張授業

A lecture for high school students on geometry

川上 智博（和歌山大学教育学部）
Tomohiro KAWAKAMI

概 要

本稿では、和歌山県立の高校での幾何学についての出張授業の一例について考察し、その成果と課題についてまとめる。

【キーワード】 幾何学、球面、オイラーの定理。

1．はじめに

本稿では、和歌山県立の高校での出張授業の一例について考察し、その成果と課題についてまとめる。

大学等の高等教育機関の教員が、高校生・中学生を対象とした数回完結型または一回完結型の出張授業を行うことが増えてきた。高校生が現代数学に触れ合うために、高校においての大学教員による出張授業を受ける機会が増えてきた。また高校生・中学生が大学において、特別授業を受ける機会も増えてきた。

2012 年 9 月に行った出張授業は 50 分授業 2 回を一日で行い、その翌日に 50 分授業を 3 回行い、またその翌週の二日間に 50 分授業を 2 回と 3 回行うものであった。授業日数は四日間で、総授業時間は 500 分であった。今回の出張授業はサイエンス・パートナーシップ・プログラム (SPP) によるものである。高校 2 年生の理系のクラスを対象とし、「幾何学の扉」という題目の生徒参加型の出張授業を行った。この出張授業に関する記事が、科学技術振興機構のホームページに掲載された ([2])。

一日目の計画は以下である。太陽光の角の差から、地球の大きさを測った方法を学ぶ。海岸からどれくらい沖へ出ると、陸地が見えなくなるかを計算で求める。ベクトルの内積・法線ベクトルについて学習する。いろいろな曲線のパラメータ表示・法線ベクトルについて学習する。

二日目の計画は以下である。曲線の学習の後、曲面へと発展させる。平面とは違う困難があり、様々な発見の中からオイラーの定理を紹介する。球面上での三角形を考え、球面上の三角形は内角の和が 180 度より大きくなっていることを、ビーチボールや発泡スチロールの球を用いて確認する。球面上の三角形について、面積と内角の和についての公式を学ぶ。正四面体・正六面体について、オイラーの定理が成立することを確認し、各班ごとに考えた多面体を紹介する発表を行ってもらう。

三日目の計画は以下である。欠損角を導入し、正四面体・正六面体について欠損角の和を計算する。各班で多面体を作り、その欠損角の和を計算してもらう。各班が考えた多面体の欠損角の和について、発表を行ってもらう。

四日目の計画は以下である。これまでの内容で、各個人が気づいたことを A4 用紙 1 枚分にまとめてもらって、数学ポスターとして、お互いに鑑賞してもらう。そのあと、各班ごとに A3 用紙 1 枚分の数学ポスターを作成して、発表してもらう。著者によるまとめと事後アンケートを行う。

2．一日目の授業方法

簡単な作業を行うために、大きな机のある会議室で行った。生徒参加型の授業を行うために、発砲スチロール球、ビーチボール、ジオマグ、ジオシェイプ、マグネットテープ、関数電卓、生徒たちの座席表、ワークシート等を用意してもらった。授業はパソコンの画面をスクリーンに映し出すことによって行った。作業のときは、6 班にわかれてもらった。

始めに、著者の自己紹介を行った。授業の中で、問いかけを行って生徒達を指名して答えてもらった。重要と思われることを、間をとって、ワークシートに書き込んでもらった。

地球が丸いこと述べて、太陽光の角の差から、地球の大きさを測る方法について説明した。毎年、夏至の日の正午にシエネ (現在のアスワン) では、深い井戸の底まで太陽の光が届く事実が知られていました。アレクサンドリアとシエネの距離が 800km で、二点間の太陽光の角度の差が 7.2 度で、太陽光は平行光線で、地球が完全な球であるという設定で、ワークシートにしたがって地球 1 周の長さと地球の半径を求めてもらった。比例に関する式を立ててもらって、解いてもらった。地球 1 周の長さは 40000km となり、地球の半径は約 6366.1977km と求まった。地球 1 周の長さから、地球の半径を求めるときに、半径 r の円の円周は、$2\pi r$ となることを思い出してもらった。実際の地球は、極半径と赤道半径が異なることを説明した。

海岸からどれだけ離れると海岸線が見えなくなるでしょうか、水平線は、どれくらいの距離にあるでしょうかと問いかけを行った。目の高さを 1m として、円と直角三角形の書かれたワークシートを用いた。地球の半径は、極半径の 6357km を用いた。水平線までの距離を求めるために、必要な定理は何かを指名して聞いてみた。三平方の定理と正解が出た。関数電卓で計算してもらった。約 3565.67m となる。目の高さを 1.5m としたら、約 4367.04m となることを説明した。

単位円や中心が原点、半径 3 の円の点の座標表示を指名して聞いてみた。角の測り方として、度数法と弧度法を説明した。続いて、中心が $(1,2)$ で半径 1 の円の座標表示を問いかけてみた。単位円を平行移動すればよいので、平行移動について、指名して聞いてみた。単位円を x 軸方向に 1、y 軸方向に 2 だけ平行移動すればよいことがわかった。単位ベクトルは何かを指名して聞いてみると、長さが 1 のベクトルであると解答が出てきた。成分表示された二つのベクトルが垂直かどうか、ベクトルの垂直条件を聞いてみた。ベクトルの内積が 0 かどうかを判定すればよい。ベクトルの内積の定義を復習をした。ベクトル $(1,2)$ に垂直な単位ベクトルを求める問題を出した。求めるベクトルを (x,y) とおいて、垂直条件、長さ 1 の条件を立式して、連立方程式を解く方法をやった。

二次関数のグラフを九個を提示して、$y=(x+2)^2-3$ のグラフを選ぶ問題を出した。指名したらすぐに正解が出た。

授業の終わりのころに、校長先生、数学教員、理科教員が授業参観をしてくださった。

3. 二日目の授業方法

放物線 C と直線 m が一点 P で接するとき、P を接点、m を P における接線ということを説明した。接点 P を通り、接線と垂直な直線を P における法線といい、法線の方向を表すベクトルを法線ベクトルといい、法線ベクトルで、長さが 1 のベクトルを単位法線ベクトルというを説明した。具体的な例で、単位法線ベクトルを求める例を解答してもらった。

放物線以外の曲線で、接線・法線が定義できるかどうかを指名して聞いてみた。一般の曲線でも定義できることを説明した。

楕円は聞いたことがない人がほとんどだったが、楕円を説明した。例として、楕円 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上の点は、$(4\cos\theta, 3\sin\theta)$ と表せることを説明した。

続いて、球面の法線ベクトルを体感してもらうために、ビーチボールにマグネットテープを貼って、その上にジオマグを立てて、見てもらった。半径 1 の球面と半径 2 の球面では、曲がり具合が違うことを説明した。同相であるものを同じとみる立場なら、同じなのだが、ここでは、球面の半径が大きくなると、曲がり具合が小さくなることを説明した。曲率・曲率半径が背景にあることを触れた。半径の違う球面の例として、直径 10cm の発泡スチロール球とビーチボールで、曲がり具合の違いを比べてもらった。球面の中心を通る平面で切ったときにできる円周を大円ということを説明した。発泡スチロール球に輪ゴムを巻きつけてもらって、大円を見つけてもらった。発泡スチロール球はつるつるしているので、大円以外の小さい円に巻きつけようすると、輪ゴムが飛んでしまって、巻きつきにくいのである。球面の二つの大円で囲まれた図形を二角形ということを説明した。線分で囲まれる平面図形では、角の一番少ないものが三角形になるが、曲線で囲まれる図形なので、二角形ができることを説明した。測地線が背景にあることを触れた。

半径 r の球の体積と表面積を問いかけた。体積が $\frac{4}{3}\pi r^3$、表面積が $4\pi r^2$ と解答をえた。

球面の北極に直角をとり、その角の 2 辺が赤道と交わってできる三角形を考えてもらった。発泡スチロール球に輪ゴムを 3 本巻きつけて、内角の和が $\frac{3}{2}\pi$ となる三角形を提示した。生徒たちにも同様の三角形を作ってもらった。

ここで、平面上の三角形の内角の和が π であることを思い出してもらった。その証明はどうですかと問いかけてみて、指名してみた。平行線の議論を用いるとできると説明した。

球面上の輪ゴムで作った先ほどの三角形の内角の和について、指名してみた。直角がいくつありますかと問いかけて、3 つという解答をえた。それでは、内角の和はいくらですかと問いかけると、270 度、$\frac{3}{2}\pi$

という正解が出た。球面上の三角形では、内角の和が π を超えることを説明した。この三角形は、球面の表面積の何倍でしょうと問いかけた。輪ゴムでいくつの部分にわけられていますかと問いかけてみて、$\frac{1}{8}$ 倍という正解をえた。

各班ごとに、球面上の面積の求まる図形を見つけてみましょうと問題提起を行った。そうすると、球面の半分の面積になる半球の解答が出た。

2 辺のなす角の大きさが θ の二角形の面積を考えてもらった。2 辺のなす角が θ で、1 周分の 2π で $4\pi r^2$ なので、$4\pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = 2r^2\theta$ となることを説明した。

平面上の三角形の面積の求め方を指名して聞いてみた。底辺×高さ÷ 2 が出た。2 辺の長さ a, b がわかっていて、その間の角を θ とすると、面積 S は、どうなりますかと問いかけた。$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ とうい正解が出た。3 辺の長さがわかっているとき、三角形の面積はどうなりますかと問いかけた。公式を述べて、何の公式と言いますかと聞いてみた。ヘロンの公式と正解が出た。

定理 3.1. *([1])* 半径 r の球面上の三角形 ABC の内角を A, B, C とするとき、三角形 ABC の面積 S は、$S = r^2(A + B + C - \pi)$ となる。

証明. 三角形の辺を含む大円を球面上に描いて、球の中心について A, B, C の対称点を A', B', C' をとると、三角形 $A'B'C'$ は三角形 ABC と合同である。三角形 ABC の内角 A, B, C をもつ二角形の面積を S_A, S_B, S_C とする。$2S_A$ は、角 A の 2 辺を含む大円で区切られる二角形の 2 倍の面積である。$2S_B, 2S_C$ についても同様である。これらの 6 つの二角形を合わせると、球面を覆いつくし、三角形 ABC、三角形 $A'B'C'$ では、三重に覆っていることがわかる。このことから、$4S + 4\pi r^2 = 2(S_A + S_B + S_C)$ となる。二角形の辺のなす角が θ のとき、二角形の面積は $2r^2\theta$ であるから、右辺は、$4r^2(A + B + C)$ となり、$4S + 4\pi r^2 = 4r^2(A + B + C)$ である。よって、$S = r^2(A + B + C - \pi)$ をえる。 □

先ほど例に出した三角形に対して、ビーチボールで確かめてもらった。

続いて、三次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内の多面体について説明した。多面体とは、4 つ以上の平面によって囲まれた立体のことである。正四面体と金平糖のような多面体を例示した。曲面によって囲まれた立体は、多面体でないことを説明した。その例である球面や楕円体を例示した。多面体を構成する平面は、多角形である。それらを面といい、その面の境界を辺といい、辺の端点を頂点という。以下の定理が成立する。

定理 3.2 (オイラーの定理 1)**.** 穴の開いていない多面体に対して、頂点の数 − 辺の数 + 面の数 = 2 である。

この定理を正四面体・正六面体 (立方体) で確かめてもらった。

ジオマグでいろいろな多面体を作ってもらった。オイラーの定理が成り立つかどうかを確かめてもらった。穴の開いた多面体を作成した班もあった。立体の作成後、各班ごとに、作成した多面体を披露してもらって、オイラーの定理が成立しているかどうかを確かめてもらった。穴の開いていない多面体を作成した班は、オイラーの定理 1 が成立していることが確かめられた。穴の開いた多面体に対しては、オイラーの定理 1 が成り立っていないように思われた。実は、穴の開いた多面体に対して、以下のオイラーの定理 2 が成立する。

定理 3.3 (オイラーの定理 2)**.** 穴の数が g 個の多面体に対して、頂点の数 − 辺の数 + 面の数 = $2 - 2g$ である。

作成された穴の開いた多面体に対して、オイラーの定理 2 を確かめてもらった。

4. 三日目の授業方法

穴の開いていない多面体の凸な頂点に集まる角の和は 2π より小さい。2π との差をここでは、欠損角ということにして、欠損角を導入した。正四面体・正六面体の一つの頂点に対しての欠損角を求めて、例示した。各班に、ジオシェイプによる正四面体・正六面体の模型を配付した。ジオマグで立体の作成を班ごとにしてもらった。古いサッカーボール型の切頂二十面体のジオシェイプによる模型を例示した。ジオマグで立体を作成してもらって、欠損角について成り立つ性質を見つけてもらった。作成された立体の中には、辺だけ・頂点だけなどの立体もあり、多面体でないものもあった。各班ごとの欠損角の性質について、発表しもらった。

明日までにレポートにまとめられるようにしましょうと、予告した。

5. 四日目の授業方法

欠損角の復習から始めた。ジオシェイプで作った正四面体・正六面体の頂点の欠損角が、それぞれ 180 度、90 度と説明した。欠損角について成り立つことについて、各自で A4 版のポスターを作成してもらった。ジオマグで多面体・多面体もどきを作成しながら、ポスターを作ってもらった。五個の正多面体については、ほとんどの班で、作成できていた。穴の開いた多面体を作成した班があった。班ごとに、ポスターと多面体と一緒においてもらって、互いに鑑賞してもらった。班ごとに発表してもらった。発表の中で、欠損角の和が 4π になることに気づいた班があった。

各班ごとに A3 版の 1 つのポスターを作成してもらった。欠損角の性質について、まとめてもらった。

穴の開いていない多面体に対して、欠損角の和が 4π になることを説明した。

できあがった A3 版のポスターについて、各班ごとに発表してもらった。

以上で授業内容が終了した。その後、SPP のアンケートと著者個人のアンケートを行った。

6．高校生向けに配慮した点、生徒のアンケート等について

高校生向けに配慮した点は、実習や作業や実験を取り入れた点や高校の教科書には書かれていないが、生徒達が興味をもつであろう内容を授業した点である。

高校側の担当者に大学に 2 回おいでいただいて、授業の打ち合わせを行った。何で立体を作成してもらうかを検討して、ジオマグ・ジオシェイプを用いることとなった。

SPP のアンケートと著者個人のアンケートの二つを行った。著者個人の自由意見の回答結果が以下である。肯定的な回答が多かったが、そうでない回答もあった。

この授業のよかった点

・ジオマグのような教材を用いるところがとてもよい。

・普通の授業よりも自由であり、「考える」ということが大切なところ。

・発表する機会があること。

・実際にやるところ。いろいろな道具を使うところ。

・道具を使って立体を作ること。

・理解しやすい説明がよかった。

・作業があること

・わからないことがわかかった。

・発表したりすること。

・ジオマグで実際に立体図形をつくりながら授業を受けたので、わかりやすかった。

・いろいろな作業ができること。班で話し合いできること。

・実験によって本当にそうなのかわかりやすかった。

・みんなで協力すること。

・ジオマグを使ったところ。

・組み立てるのがよかった。

・ジオマグを使って多面体を作るのは少し頭を使わなければならなかったけど、楽しかった。

・実際に何かを作ってみるのは他の授業にはなかったので、よいと思ったし、頭だけで考えるよりもわかりやすかった。聞き取りやすかった。

・ジオマグといったものを使って、考えることがよいなあと思った。

・いろいろ作ったりするのが楽しかった。

・知らないことをたくさん教えてくれた。

・いつもと違う授業で面白い。

・ジオマグが楽しかった。

・実際に手を動かして、物体を作成し、その後計算していろいろなことを導き出せたこと。

・普段できない内容や方法で学ぶことができた。

この授業の改善すべき点

・なし。

・ありません。

・スピーカーの音量が少し大きいと思います。

・SPP の意味がわからない。

・画面が見にくい。

・答えだけでも教えてほしい。

・もう少し先生の指示が伝わりやすければ、スムーズに進むと思う。

・はじめの授業は計算ばかりでつまらなかった。

・聞き取りにくかった。

・最初の方にした数学のプリントの答えをすべて言ってほしかった。

・もう少しだけゆっくり話してほしかった。

・マイクの音が大きい。

・スクリーンが見にくい。

7．おわりに

以上のアンケート結果から、出張授業の成果として、高校生たちに授業を楽しんでもらった点、高校生が通常の授業では学習できないことを学習できた点がある。一方、課題として、画面が見にくかった点がある。今後、出張授業を行うにあたり、グループ活動・グループ作業を行うときの教材の検討が必要であると考えている。

8．謝辞

出張授業を行う機会をくださった和歌山県立耐久高等学校の上田芳裕先生に感謝します。

参考文献

[1] 坪井俊、星の王子さまと数学者、数学通信 **15** No. 1 (2010), 6–17.

[2] 和歌山県立耐久高等学校 SPP 〜サイエンス・パートナーシップ・プロジェクト、http://spp.jst.go.jp/kikan/highschool/s000946.html.